بسم الله الرحمن الرحيم

*

PENGANTAR MATEMATIKA TEKNIK

Untuk Vokasi

Andika Wisnujati

Agung Mulyo Widodo

PENGANTAR MATEMATIKA TEKNIK

UNTUK VOKASI

UMY PRESS

PENGANTAR MATEMATIKA TEKNIK UNTUK VOKASI
ANDIKA WISNUJATI, AGUNG MULYO WIDODO
Penyunting : Tri Wahyono
Desain Sampul : Djoko Supriyanto
Desain Isi : Ngadimin Srowot

Cetakan pertama, UMY Press, Desember 2021
UMY Press

UMY Press
Kampus Universitas Muhammadiyah Yogyakarta
Jl. Brawijaya, Tamantirto, Kasihan, Bantul DI Yogyakarta 55183
Telp. 0274-387656
Fax. 0274-387646
WA: 085157715504
Email : umypress@gmail.com
instagram : UMY Press
shopee : umy press book

Foto sampul depan: SHABAM SHARAN

Katalog dalam terbitan
Pengantar Matematika Teknik untuk Vokasi
Andika Wisnujati, Agung Mulyo Widodo
Yogyakarta, UMY Press
(xii+ 166 hlm; 18 x 25.5 cm)

Prakata Penulis

Puji syukur kepada Allah swt., atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga kami dapat menyusun buku ajar Matematika Teknik ini dengan baik. Sholawat dan salam untuk baginda tercinta Nabi Muhammad saw. yang selalu kita nantikan syafaatnya di hari akhir kelak.

Matematika mempelajari tentang hal-hal yang berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran, bukan menekankan pada hasil eksperimen atau hasil observasi. Maka secara informal disebut sebagai ilmu bilangan dan angka. Materi matematika dapat dipahami melalui penalaran yang cukup. Sebagai contoh konsep yaitu perumusan dari simpulan dan dari fakta, fenomena, pengalaman, serta intuisi matematika.

Menurut James and James (1976), matematika adalah ilmu yang mempelajari tentang *logic*, mengenai konsep tentang bentuk, pola (susunan), besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan antara satu dengan yang lainnya. Matematika dibagi dalam tiga golongan yaitu *algebra, analysis,* dan *geometric*. Namun, beberapa pendapat mengartikan bahwa matematika terbagi menjadi empat golongan yaitu *arithmetic*, *algebra*, *geometric,* dan *analysis* dengan aritmatika mencakup teori bilangan dan statistika.

Pada buku Matematika Teknik untuk vokasi ini membantu para mahasiswa untuk mempelajari matematika dasar sehingga dapat diaplikasikan dalam aktivitas sehari-hari. Buku ini ditulis menggunakan bahasa maupun rumus yang mudah dipahami. Pada buku ini, mahasiswa akan menemukan beberapa macam contoh soal-soal untuk dapat melatih ketangkasan dalam mengerjakannya. Harapannya, para mahasiswa akan lebih paham untuk belajar matematika.

Buku Matematika Teknik untuk vokasi ini diawali dengan bab yang membahas tentang *Matriks* dan jenisnya, aturan operasi *matriks*, transformasi elemener, *invers matriks*, *matriks* eselon, *rank* matriks, dan persamaan linear serentak. Pada bab selanjutnya dibahas mengenai determinan yang membahas tentang definisi determinan tingkat N, minor, kofaktor, ekspansi laplace, aturan *sarrus*, determinan *transpose*, sifat-sifat determinan, dan penyelesaian persamaan linear serentak atau simultan dengan determinan. Pada bab 3 dibahas tentang fungsi meliputi definisi fungsi, jenis-jenis fungsi, menentukan *domain and range of functions*, *invers* fungsi serta komposisi dari suatu fungsi. Bab 4 dibahas mengenai Limit Fungsi yang meliputi interpretasi atau makna limit, definisi, cara menentukan limit fungsi, dan evaluasi limit satu sisi (limit kiri atau limit kanan), teorema limit, limit bentuk tak tentu, limit fungsi triginometri, kontinuitas fungsi. Pembahasan berikutnya mengenai Turunan Fungsi yang meliputi tentang turunan fungsi (derivatif). Kita diskusikan tentang rumus turunan standar termasuk aturan penjumlahan/pengurangan, perkalian, perkalian, dan aturan rantai. Ada juga rumus-rumus turunan dari fungsi polinomial, fungsi akar, fungsi trigonometri, fungsi trigonometri terbalik, fungsi hiperbolik, fungsi eksponensial, dan fungsi logaritma. Materi lain yang dibahas meliputi turunan/diferensiasi implisit, turunan *parametric* dan turunan tingkat/orde tinggi, deret Taylor dengan suku sisa Langrange dan deret Mclaurin. Pada bab ini juga dijelaskan tentang penggunaan turunan fungsi untuk mencari nilai tengah (teorema Rolle), nilai tengah Cauchy, nilai tengah Langrange penyelesaian bentuk-bentuk limit tak tentu, nilai ekstrem, pembuat nilai minimum/maksimum/titik belok, mencari panjang busur, tangen, subtangen, normal dan subnormal, kelengkungan suatu busur dan evolute, serta metode pencarian akar-akar. Kemudian pada bab 6 membahas tentang Integral Tak Tertentu, yaitu mengenai pengertian integral tak tertentu, sifat-sifat integral tak tertentu. Juga diberikan rumus-rumus dasar integral tak tertentu, cara-cara menyelesaikan integral tak tertentu dengan metode subtitusi, integral parsial, rumus-rumus reduksi, penerapan notasi D, seperti pada bab turunan fungsi. Dijelaskan juga cara-cara penyelesaian integral fungsi pecah rasional, integral fungsi trigometri dan integral subtitusi trigonometri serta integral fungsi irrasional. Pada akhir dari pembahasan dalam buku ini yaitu di Bab 7 membahas mengenai Integral Tertentu yang menjelaskan tentang definisi integral tertentu, sifat-sifat integral tertentu. Diberikan pula teorema dasar kalkulus yang menunjukkan hubungan antara derivatif dan integral. Juga akan membahas masalah interpretasi penting dari integral secara pasti. Hal tersebut akan menunjukkan kepada mahasiswa bagaimana cara menghitung integral yang pasti tanpa menggunakan definisi (yang seringkali sangat tidak menyenangkan). Contoh-contoh di bagian ini semua dapat dilakukan dengan pengetahuan dasar integral tak tertentu dan tidak akan memerlukan penggunaan aturan substitusi, termasuk cara-cara menyelesaikan integral tak wajar. Tujuan dari pembahasan keseluruhan bab dalam buku ini agar mahasiswa mampu mengerti, memahami dan menyelesaiakan permasalahan yang berkaitan dengan matematika untuk mahasiswa vokasi.

Buku ini digunakan sebagai sarana pelengkap dalam mata kuliah Matematika untuk vokasi. Penulis menyadari penyusunan buku ini masih banyak kekurangan dan belum mampu memuaskan banyak pihak. Masukan kritik dan saran sangat penulis harapkan untuk perbaikan buku ajar Matematika Teknik ini di masa yang akan datang. Apresiasi dan penghargaan yang tinggi kami ucapkan kepada seluruh rekan kerja dan pihak yang telah membantu terselesaikannya buku ajar Matematika Teknik ini.

Yogyakarta, Mei 2020

Penulis

Daftar Isi

BAB 1

Matriks

Pada bab ini akan dibahas tentang *matriks* dan jenis-jenisnya, aturan operasi *matriks*, transformasi elemener, *invers matriks*, matriks eselon, *matriks rank* dan persamaan linear serentak sehingga diharapkan mahasiswa mampu memahami, menerapkan, dan menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan matriks

1.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks

Suatu deretan dari empat persegi-panjang yang terdiri atas bilangan yang tersusun dalam sejumlah **m-baris** dan **n-kolom** dalam tanda kurung disebut suatu **matriks**.

Contoh :

Berikut ini adalah suatu matriks berukuran 3 x 4. Ditulis A_{3x4}. (3 baris 4 kolom).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Sedangkan jenis-jenis matriks adalah sebagai berikut:

a. **Matriks bujur sangkar** adalah matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolom. Ini disebut sebagai suatu matriks n x n atau matriks dengan orde n.
b. **Matriks Simetrik** adalah suatu matriks bujur sangkar yang memenuhi syarat elemen – elemen di belahan kanan atas didapat dengan mencerminkan belahan kiri bawah terhadap diagonal pokok.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trace. Jumlah elemen diagonal pokok suatu matriks bujur sangkar disebut *trace*. Untuk matriks di atas :

Trace A = 2 + 5 + 1 = 8

c. **Matriks Singular** dapat dijelaskan apabila determinan matriks bujur sangkar hasilnya nol, maka **matriks tersebut disebut sebagai matriks singular**. Jika determinannya tidak nol, disebut **non-singular**.

d. **Matriks Baris** dapat dijelaskan dengan syarat matriks baris yang mempunyai m = 1.

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

e. **Matriks Kolom** dapat dijelaskan dengan suatu matriks kolom yang mempunyai n=1.

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

f. **Matriks Nol** dapat dijelaskan dengan suatu matriks yang mempunyai keseluruhan elemen-elemennya adalah nol.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g. **Matriks Satuan**. Matriks satuan:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3x3} \text{ ditulis } I_3$$

Adalah suatu matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen pada diagonal utamanya (dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah) mempunyai nilai **satu** sedangkan elemen-elemen lain adalah nol.

h. **Matriks Diagonal.** Suatu matriks berbentuk bujur sangkar yang mempunyai elemen-elemen a_{ii} sepanjang diagonalnya sedang elemen lainnya adalah nol disebut matriks diagonal.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

i. ***Transpose.*** *Transpose* A^I dari matriks A adalah matriks dimana baris dan kolomnya dipertukarkan. Misalnya:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \Longrightarrow A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Transpose dari suatu **matriks kolom** adalah suatu **matriks baris**.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow A' = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

j. **Minor**. Suatu minor M_{ij} dari matriks A dibentuk dengan cara menghilangkan baris ke-*i* dan kolom ke-*j* elemen yang bersesuaian dari matriks asal.

Perhatikan misalnya:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

k. **Kofaktor**. Kofaktor C_{ij} adalah sama dengan minor yang tertanda $(1)^{i+j}M_{ij}$. Jadi dari contoh diatas:

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$$

l. **Adjoint Matriks**. Suatu matriks adjoint dari matriks bujur sangkar A adalah *transpose* matriks kofaktor A. Misalkan matriks kofaktor A adalah:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$Adj\,[C_{ji}] = [C_{ji}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

m. **Matriks Inversi.** Inversi A^{-1} dari matriks A akan memenuhi hubungan berikut:

$$A^{-1} A = AA^{-1} = I$$

n. **Matriks Ortogonal**. Suatu matriks ortogonal akan memenuhi hubungan:

$$A^{I} A = AA^{I} = I$$

Dari definisi matriks inversi, jelaslah bahwa untuk suatu matriks ortogonal, $A^I = A^{-1}$

1.2 Aturan Operasi Matriks

Penambahan (Pengurangan), berlaku bila dua buah matriks yang memiliki sejumlah baris dan kolom yang sama. Boleh **dijumlahkan (dikurangkan)** dengan **menambah (mengurangi)** elemen-elemen yang sesuai.

Contoh:

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Perkalian. Perkalian dua matriks A dan B akan menghasilkan matriks lain C .

Syarat A_{mxp} B_{pxm} = C_{mxn}, banyak kolom A = banyak baris B

$$AB = C$$

Elemen C_{ij} dari C ditentukan dengan memperkalikan elemen-elemen dalam baris ke-*i* dalam A dengan elemen-elemen di kolom ke-j dalam B menurut peraturan:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1, 2, \ldots m \text{ dan } j = 1, 2, \ldots n$$

Contoh:

2. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 0 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} = C$$

Jelaslah bahwa jumlah kolom pada A harus sama dengan jumlah baris pada B. Harus dicatat juga bahwa $AB \neq BA$

A_{mxp} B_{pxn} = C_{mxn}

Contoh:

3. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 11 \end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 13 \end{bmatrix}$$

Transpose suatu perkalian **AB = C** adalah $C^I = B^I A^I$

Contoh:

5. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow C^I = B^I A^I =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1.3 Matriks – *invers* (matriks – balikan).

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar berukuran sama, sedemikian hingga $AB = BA = I$, maka B disebut ***invers*-nya matriks A** dan ditulis **B = A^{-1}**. Sebaliknya juga A sebagai ***invers*-nya matriks** B, ditulis $A = B^{-1}$. Jadi apabila pada A_{nxn} dan B_{nxn} berlaku: $AB = I$, maka dikatakan **matriks A adalah *invers*-nya matriks** B dan sebaliknya, maka jika matriks bujur sangkar A mempunyai *invers* A^{-1}, ini berarti menunjukkan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa jika matriks A mempunyai *invers* maka *inver*-snya tunggal.

Bukti:

Andaikan matriks B dan C masing-masing adalah merupakan *invers*-nya A ini berarti bahwa:

$$AB = I \text{ dan } CA = I$$

Tetapi **B = IB = (CA)B = C (AB) = CI = C**; sehingga **B = C**, yang berarti bahwa *invers* dari A itu tunggal.

Sifat:

Jika matriks A_{nxn} dan B_{nxn} mempunyai *invers* A^{-1} dan B^{-1}, maka:

- Dari $A.A^{-1} = I = A^{-1}A$, maka langsung terbukti bahwa $(A^{-1})^{-1} = A$
- Misalkan $X = (A.B)^{-1}$, maka $(A.B)X = I$

  Dengan sifat asosiatif didapat:

  $$(A.B)X = A(B.X) = I$$

  Jelas, bahwa $\left(A^{-1}A(B.X)\right) = A^{-1}I = A^{-1}$

  Dengan sifat asosiatif lagi

  $$\left(A^{-1}A(B.X)\right) = A^{-1}$$

  $$I(B.X) = A^{-1} \text{ atau } (B.X) = A^{-1}$$

  Maka tampak, $B^{-1}(B.X) = B^{-1}A^{-1}$

  Dengan sifat asosiatif:

  $$(B^{-1}B)X = B^{-1}A^{-1}$$

  $$I.X = B^{-1}A^{-1}$$

  $$X = B^{-1}A^{-1}$$

  Terbukti bahwa: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Teorema : Jika A matriks-non-singular, maka:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}}$$

Bukti :

Karena $A.Adj\ A = |A|.I$, maka $I = A\ \frac{Adj\ A}{|A|}$

Sehingga,

$$A^{-1}I = A^{-1}A\,\frac{Adj\ A}{|A|}$$

$$A^{-1} = I\,\frac{Adj\ A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$

<u>Contoh</u>:

6. Dapatkan A^{-1} dari A= $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   <u>Penyelesaian</u>:

   $|A| = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 10 = -1$

   Matriks kofaktor C $= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

   Adj A $= C^{I} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

   $$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Dapatkan B^{-1} dari B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

   <u>Penyelesaian</u>:

   $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 3$

   Matriks kofaktor C $= \begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, *Adj B* = C $= \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

   $$B^{-1} = \frac{Adj\ B}{|B|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

1.4 Transformasi Elementer

Misalkan M suatu matriks berukuran m x n, maka yang dimaksud dengan transformasi elementer terhadap matriks M adalah satu dari operasi – operasi berikut:

a. Penukaran pada baris ke-i dan baris ke-j, ditunjukkan dengan B_{ij}
b. Penukaran lajur ke-i dan lajur ke-j, ditunjukkan menggunakan K_{ij}
c. Penggandaan tiap elemen baris ke-i dengan nilai skalar k ≠ 0, dengan B_i (k).
d. Menggandakan tiap elemen lajur ke i dengan skalar k ≠ 0, ditunjukkan dengan K_i (k).
e. Menambahkan kepada elemen-elemen baris ke-i dengan (k) kali elemen-elemen yang bersesuaian dari baris ke-j, ditunjukkan B_{ij} (k).
f. Penambahan kepada elemen-elemen lajur ke-i dengan (k) kali elemen-elemen yang bersesuaian dari lajur ke-j, ditunjukkan K_{ij} (k).

Transformasi – transformasi B dinamakan **<u>transformasi – baris – elementer (Operasi Baris Elementer/ OBE).</u>**

Transformasi – transformasi K dinamakan **<u>transformasi – lajur – elementer (Operasi Kolom Elementer/OKE)</u>**.

Dua buah matriks P dan Q disebut **<u>ekuivalen</u>**, P ~ Q, jika nilai dapat diperoleh dari nilai yang lain dengan sederetan transform elementer.

<u>Contoh</u>:

8. Sebuah matriks $= \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, carilah hasil Baris 1 (B_1) ditukar dengan baris 2 (B_2).

   <u>Penyelesaian</u>:

   $$\text{Matriks, } A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

9. Sebuah matriks, $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ carilah hasil Baris 1 (B_1) dengan konstanta ¼.

Penyelesaian:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{B_{1(1/4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Bawalah matriks $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ke dalam (menjadi) matriks segitiga atas dengan menggunakan transformasi – baris – elemener/ OBE.

    Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{B_{21(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{B_{31(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{B_{2(-1)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{B_{32(4)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \overset{B_{3}\left(\frac{1}{11}\right)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Beberapa pengertian yang harus anda ketahui:

Berikut ini diberikan sebuah contoh sebuah matriks B yang berukuran 3x4,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Baris ke-1 dan baris ke-2 disebut sebagai **baris tidak nol**, karena pada kedua baris tersebut terdapat elemen-elemen yang tidak nol.

b. Bilangan 1 pada baris ke-1 dan bilangan 3 pada baris ke-2 disebut **unsur pertama tidak nol** pada masing-masing baris.

c. Bilangan 1 (pada baris ke-1 kolom pertama) dinamakan **satu utama.**

d. Baris ke-3 disebut sebagai **baris nol**, karena setiap elemen pada baris ke-3 adalah nol.

Sifat-sifat matriks hasil transformasi baris elementer:

a. Pada **baris tidak nol** maka **elemen tidak nol pertama** adalah 1 dinamakan **satu utama.**

b. Pada baris yang berurutan, baris yang bernilai rendah bernilai 1 utama yang lebih ke kanan.

c. Jika ada **baris nol** (baris yang semua elemennya nol), maka nilai tersebut diletakkan pada baris paling bawah.

d. Pada kolom yang bernilai elemen satu utama, maka elemen yang lainnya adalah bernilai nol.

Matriks dikatakan bernama **matriks esilon baris** jika dipenuhi sifat a, b, dan c (dipakai pada **Proses Eliminasi Gauss**).

Matriks dikatakan bernama **matriks esilon baris tereduksi** jika memenuhi semua sifat. **(dipakai pada Proses Eliminasi Gauss-Jordan**).

Contoh:

11. Tentukan matriks esilon-baris tereduksi:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

<u>Penyelesaian</u> :

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{-2B_1+B_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 7\\ 0 & 1 & 1 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow{B_{23}} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 1 & 7\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2B_2+B_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{-B_3} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-B_3+B_2} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{B_2+B_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Perhatikan hasil OBE diatas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Setiap baris mempunyai satu utama. Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom (kolom 4 tidak mempunyai satu utama).

1.5. Matriks Eselon

Matriks Eselon adalah matriks yang memiliki banyak elemen nol sebelum elemen tidak nol pertama dari baris hingga ke baris menjadi bertambah sampai dengan (apabila ada) semua elemen dalam baris tersebut menjadi nol.

<u>Proses reduksi untuk ke bentuk eselon</u>:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{B_{21(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{B_{31(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{32(1)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\,.$$

Jadi bentuk matriks eselon dari $\boldsymbol{A}$ adalah:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>**Matriks Eselon Baris Tereduksi/ EBT**</u>

Syarat Matriks Eselon-Baris-Tereduksi (EBT) adalah:

a) Matriks eselon baris tereduksi yaitu matriks eselon dimana nilai elemen pertama yang tidak nol adalah 1.

b) Elemen ke-1 merupakan satu-satunya unsur yang tidak nol pada kolom di mana elemen 1 tersebut berada.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 1 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 01 & 5 \end{bmatrix}$$

Ini adalah Matriks Eselon Baris Tereduksi/ EBT

<u>Reduksi matriks menjadi bentuk matriks eselon baris tereduksi (*Reduced row echelon form*).</u>

Contoh:

12. Reduksilah matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

<u>Penyelesaian</u>:

Langkah pertama, bawa A menjadi bentuk **eselon** terlebih dahulu, kemudian teruskan dengan OBE sehingga dua syarat di atas dipenuhi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{B_{21(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{B_{31(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{32(-1)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{B_{1(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{B_{12(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{B_{13(-3)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{B_{23(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Jadi bentuk matriks EBT dari A adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

1.6. Rank Matriks

Sebelum kita bahas *Rank* Matriks diperkenalkan lebih dulu ruang baris dan ruang kolom.

- Ruang baris dari matriks A_{mxn} adalah ruang vektor bagian dari R^n yang terbentuk oleh vektor-vektor baris dari A.
- Ruang kolom dari matriks A_{mxn} adalah ruang vektor bagian dari R^m yang terbentuk oleh vektor-vektor kolom dari A.
- Matriks ekuivalen baris atau kolom mempunyai ruang baris atau ruang kolom yang sama

Definisi dari *Rank* Matriks:

- Rank baris matriks A sama dengan dimensi ruang baris matriks A
- Rank kolom matriks A sama dengan dimensi ruang kolom matriks A
- Rank baris = rank kolom → disebut rank matriks A =r(A).
- Rank matriks yaitu menyatakan jumlah maksimum vektor baris atau kolom yang bebas linier.
- Untuk mencari *rank* dari suatu matriks dapat digunakan transformasi elementer yaitu dengan mengubah beberapa banyak mungkin baris atau kolom menjadi *vector* nol (dikarenakan vektor nol adalah bergantung linier).
- Dalam bentuk matriks eselon, *rank* matriks menyatakan jumlah baris yang tidak memuat baris nol (0).
- *Rank* matriks sering digunakan untuk melihat apakah suatu matriks disebut *singular* atau *non singular*. Jika A matriks bujur sangkar yang mempunyai dimensi *nxn*, maka:
    - Matriks A adalah *nonsingular* apabila nilai rank(A) = n.
    - Matriks A adalah *singular* apabila nilai rank A < n
- *Rank* matriks yaitu jumlah maksimum vektor baris atau vektor kolom yang bebas linier.
- Untuk mencari *rank* matriks *di*lakukan transformation elemener dengan cara mengubah beberapa baris atau kolom menjadi vektor nol, karena matriks ekuivalen mempunyai *rank* matriks yang sama.
- Matriks yang hanya mempunyai 2 baris jika baris yang satu kelipatan dari baris yang satu kelipatan dari baris yang lainnya, maka *rank* matriks = 1.

Misal matriks A berukuran *mxn*, maka:

Matriks A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ dan

Vektor baris matriks A adalah:

$$u_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$
$$u_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}]$$

$\vdots$

$$u_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}]$$

Vektor kolom dari matriks A yaitu:

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{bmatrix} v_n = \begin{bmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{bmatrix}$$

Cara mencari *Rank* Matriks adalah:

- Memilih salah satu baris yang bukan baris nol (0), beri tanda *.
- Memilih satu element dari baris tersebut sebagai elemen *pivot*, jika ada 1 atau -1.
- Kemudian mengubah menjadi nol semua element yang satu kolom dengan elemen *pivot*.
- Mengulang kembali langkah diatas terhadap baris yang tidak bertanda.
- Rank Matriks adalah banyaknya baris yang bertanda

Contoh:

13. Hitung *rank* matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

    Penyelesaian:

    $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ elemen-elemen baris 1 merupakan kelipatan baris 2 sehingga r(A) = 1.

14. Hitung *rank* matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

    Penyelesaian:

    $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ elemen-elemen baris 1 merupakan bukan kelipatan baris 2 sehingga r(A) = 2.

15. Hitung *Rank* dari matriks $= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{B_{21(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{B_{31(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{B_{32(-1)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk eselon dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga *Rank* dari A adalah r(A) = 2.

16. Hitung *Rank* dari matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \overset{B_{21(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \overset{B_{31(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \overset{B_{41(1)}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \overset{B_{32(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \overset{B_{42(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bagian eselon dari C yaitu $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,sehingga *Rank* dari C adalah r(C)= 2 (dua).

17. Hitung *Rank* dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} \overset{B_{21(-1/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 0 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} \overset{B_{31(-5/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \overset{B_{32(-5)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

r(A) = 2

18. Hitung *Rank* dari matriks $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

    Penyelesaian:

    $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{B_{21(-1/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{B_{31(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{32(-2/7)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sehingga}$$

    r(A) = 2.

19. Hitung *Rank* dari matriks $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

    Penyelesaian:

    $$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{21(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{B_{31(-1/2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sehingga r(A) =}$$

    1.

Metode lain mencari *Rank*:

Rank yaitu ***dimensi*** dari *submatriks* yang terbesar yang nilai determinannya **tidak nol.**

Contoh:

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ kemudian dengan menghilangkan kolom keempat diperoleh submatriks sebagai berikut:

    $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{di mana} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tetapi jika dari matriks A dihilangkan kolom pertama, diperoleh matriks:

$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ di mana $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$. dikarenakan sub matriks yang tidak nol ini memiliki dimensi 3, maka *rank* dari A, ditulis r(A) = 3.

21. Matriks A yang bukan matriks nol dikatakan memiliki *rank* jika salah satu minor $r \times r \neq 0$. $r(A) \neq 0$

 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, adalah matriks bujur sangkar dengan ordo terbesar yaitu 2x2, misalnya: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

 $|A|$ = -7 ≠ 0 maka r(A) = 2.

22. Matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

 $|B|$ = 5 ≠ 0 *maka r(B) = 2.*

23. Matriks $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

 $|C|$ = 0 , ordo diturunkan menjadi 2x2, ada yang nilai determinannya ≠ 0, maka $r(C) = 2$.

24. Matriks, $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

 Semua minor 2x2 adalah $|D|$ = 0. *Ordo* nya diturunkan 1x1, ada yang $|D|$ ≠ 0, maka $r(D) = 1$

25. Matriks, $E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

 Misal E diambil minor paling besar 3x3 , $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

$|E| = 39 \neq 0$ maka r(E) = 3

1.7 Persamaan Linear Serentak (Sistem Persamaan Linear)

Di bawah ini beberapa cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linier serentak dengan menggunakan matriks.

1.7.1 Penyelesaian dengan menggunakan *invers* – matriks

Pandang n buah persamaan linear dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

yang mana koefisien-koefisien a_{ij} dan h_i adalah konstanta – konstanta yang diketahui

Melalui penggunaan konsep pergandaan matriks maka persamaan (1) ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

atau: $AX = H$, di mana:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Dari: $AX = H$dan jika A mempunyai *invers*
A^{-1}, maka:

$$A^{-1}AX = A^{-1}H$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}H$$

$$I.X = A^{-1}H$$

Jadi, $X = A^{-1}H$

Contoh:

1. Selesaikan sistem persamaan:

$$\begin{aligned} x &+ y + z = 6 \\ x &+ 2y + 3z = 14 \\ x &+ 4y + 9z = 36 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} ; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2; \text{ adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}H$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jadi: x = 1, y = 2, z = 3.

1.7.2 Penyelesaian dengan metode *augmented* matriks .

Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan AX = H, ubahlah (reduksilah) matriks A menjadi matriks – segitiga – atas dengan transformasi – transforms – baris – elementers pada *augmented* matriks [AH]. Maka diperoleh himpunan persamaan tereduksi dengan variabel – variabelnya mudah diselesaikan.

Contoh:

26. Selesaikan persamaan serentak berikut ini.

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1$$

Penyelesaian:

Matriks koefisien: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Matriks suku-suku konstan: $H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Dibentuk *augmented* matriks $[A\ H]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = [A\ H]$$

Kemudian pada $[A\ H]$, matriks A direduksi menjadi matriks – segitiga atas sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} B_{21}^{(-3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} B_{31}^{(-1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} B_{2}^{(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} B_{32}^{(-4)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -14 \end{bmatrix} B_3\left(\frac{1}{11}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{11} \end{bmatrix}$$

Himpunan persamaan tereduksi adalah:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 = 3$$

$$x_3 = -\frac{14}{11}$$

Jadi: $x_3 = -\frac{14}{11}$

$$x_2 = 3 + 2x_3 = 3 + 2\left(-\frac{14}{11}\right) = \frac{5}{11}$$

$$x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 = 1 + \frac{5}{11} - 2\left(-\frac{14}{11}\right) = 4$$

1.7.3 Penyelesaian dengan metode eliminasi dari Gauss

Metode ini pada dasarnya mirip dengan metode *augmented* matriks. Pada metode eliminasi dari Gauss biasanya perhitungan dilaksanakan dengan menggunakan mesin hitung atau komputer. Supaya ralatnya kecil maka tiap baris harus digandakan dengan $|\text{faktor}|<1$. untuk itu sistem persamaan harus diatur lagi sedemikian hingga diperoleh baris pertama (baru) yang mempunyai koefisien terbesar dan diletakan paling depan.

Contoh:

27. Selesaikan:

$$3{,}41x_1 + 1{,}23x_2 - 1{,}09x_3 = 4{,}72$$

$$2{,}71x_1 + 2{,}14x_2 - 1{,}29x_3 = 3{,}10$$

$$1{,}89x_1 - 1{,}91x_2 - 1{,}89x_3 = 2{,}91$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3{,}41 & 1{,}23 & -1{,}09 & 4{,}72 \\ 2{,}71 & 2{,}14 & 1{,}29 & 3{,}10 \\ 1{,}89 & -1{,}91 & -1{,}89 & 2{,}91 \end{array}\right] \begin{array}{l} B_2 - \frac{2{,}71}{3{,}41}\ B_1 \\ \\ B_3 - \frac{1{,}89}{3{,}41}\ B_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3{,}41 & 1{,}23 & -1{,}09 & 4{,}72 \\ 0 & 1{,}162 & 2{,}156 & -0{,}651 \\ 0 & -2{,}592 & -1{,}286 & 0{,}294 \end{array}\right] B_{23}\ (B_2 \text{ ditukar dengan } B_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3{,}41 & 1{,}23 & -1{,}09 & 4{,}72 \\ 0 & -2{,}592 & -1{,}286 & 0{,}294 \\ 0 & 1{,}162 & 2{,}156 & -0{,}651 \end{array}\right] B_3 + \frac{1{,}162}{2{,}592} B_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3{,}41 & 1{,}23 & -1{,}09 & 4{,}72 \\ 0 & -2{,}592 & -1{,}286 & 0{,}294 \\ 0 & 0 & 1{,}579 & -0{,}519 \end{array}\right]$$

Maka:

$$x_3 = \frac{-0{,}519}{1{,}579} = -0{,}329 = 0{,}33$$

$$x_2 = \frac{0{,}294 + 1{,}286 \ x3}{-2{,}592} = 0{,}05$$

$$x_1 = \frac{4{,}72 + 1{,}09 \ x3 - 1{,}23 \ x2}{3{,}41} = 1{,}26$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$; dapatkan : a).$A+B$;b).$A-B$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; dapatkan : a).$A+B$;b).$A-B$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; dapatkan : a).$2A$; b).$-A$; c).$-3A$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dapatkan : a).$4A$; b).$\frac{1}{2}A$

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, dapatkan :
   a).AB b).BA c).AC d).BC e).CA f).CB

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; dapatkan : a).AB ; b).BA

7. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ tunjukkan bahwa :

   $A\,(B+C) = AB + AC = \begin{pmatrix} 9 & 30 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; tunjukkan bahwa :

   $A(BC)=(AB)C = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix}$

8. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dapatkan:
   a) A(B+C)
   b) (AB)C
9. Jika $|A| \neq B$, buktikan bahwa adj (adj A) = $|A|^{n-2}.\, A$
10. Jika M matriks bujur sangkar berukuran 2 x 2, buktikan bahwa adj (adj M) = M.
11. Jika A matriks bujur sangkar order n, buktikan bahwa |adj (adj A) | =
    $|A|^{(n-1)^2}$

12. Dapatkan *invere* dari matriks: $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

13. Dapatkan *invere* dari matriks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

14. Dapatkan *inverse* dari matriks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. Dapatkan *inverse* dari matriks: $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

16. Dapatkan *adjoint* dari matriks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

17. Dapatkan *adjoint* dari matriks: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

18. Hitung *Rank* dari matriks, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

19. Hitung *Rank* dari matriks, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

20. Hitung *Rank* dari matriks, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

21. Hitung *Rank* dari matriks, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

22. Hitung *Rank* dari matriks, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

23. Hitung *Rank* dari matriks, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

24. Hitung *Rank* dari matriks, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

25. Hitung *Rank* dari matriks, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

26. Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 11 & a & 3 \end{bmatrix}$, memiliki *rank* = 2. Carilah harga *a*.

27. *Matriks* $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & p & 3 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$, memiliki *rank* = 2. Carilah harga *3p*.

28. Selesaikan dengan metode matriks diperbesar dan dengan menggunakan *invers* sistem persamaan $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$

29. Dapatkan x, y, z yang memenuhi: $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ -x + y + 3z = -1 \end{cases}$

30. Selesaikan persamaan linear serentak: $\begin{cases} 4x - 3y + z = 11 \\ 2x + y - 4z = -1 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$

31. Dapatkan x_2 dari: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

32. Selesaikan persamaan linear serentak berikut dengan metode matriks diperbesar (*augmented* matriks):

a. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + 2y + 4z - 10 = 0 \\ 4x + 2y + 2z - 10 = 0 \\ -4x + 4y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = 2 \end{cases}$

33. Dengan metode eliminasi dari Gauss dapatkan y cukup s/d 2D (desimal) saja yang memenuhi pada: $\begin{cases} 1.10\,x - 0.96\,y + 2.72\,z = 4.02 \\ 1.88\,x - 4.62\,y + 5.50\,z = 3.11 \\ 4.12\,x - 9.68\,y + 2.01\,z = 4.93 \end{cases}$

34. Dapatkan metode eliminasi dari Gauss selesaikan (cukup s/d 3D saja) persamaan linear serentak berikut:

a. $$\begin{cases} 0.39\,x & -\,0.24\,y & +\,1.53\,z & = & -1.98 \\ 0.06\,x & -\,2.01\,y & +\,0.26\,z & = & 2.62 \\ 1.23\,x & +\,0.86\,y & +\,0.39\,z & = & 3.50 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} 2.3\,x & +\,4.1\,y & -\,2.7\,z & = & 8.5 \\ 1.4\,x & +\,1.9\,y & +\,4.5\,z & = & 7.8 \\ 2.9\,x & -\,4.5\,y & +\,3.6\,z & = & 10.3 \end{cases}$$

Daftar Pustaka

James and James, Van. Mathematic Dictionary. Nostrand Rienhold. 1976.

Kaplan Wilfred and Lewis D.J., *Calculus and Linear Agebra, Vol 1,* University fo Michigan Library, August, 2007. USA.

Kaplan Wilfred and Lewis D.J., *Calculus and Linear Agebra, Vol 2,* University fo Michigan Library, August, 2007. USA.

Piskunov ; *Differetial and Integral Calculus, Vol I,* CBS Publisher & Distributor, December, 1996, England.

Piskunov ; *Differetial and Integral Calculus, Vol 2*, CBS Publisher & Distributor, December, 1996, England.

Proter and Morrey, *Modern Mathematical Analysis, Vol. 2*, Addison –Wesley, June 1964.

Digitized from the University of Michigan, November 2007. USA.

Kreyszig Erwin., Advanved Engineering Mathematics, Jhon Wiley & Sons, 2010, USA.

Sinopsis

Buku Matematika Teknik untuk Vokasi ini dapat digunakan sebagai buku referensi penunjang pembelajaran Matematika Teknik bagi mahasiswa vokasi. Melalui buku ini, mahasiswa diharapkan mampu untuk mengerti, memahami, dan berpikir logis serta kreatif dalam menyelesaiakan permasalahan yang berkaitan dengan matematika.

Pada buku ini dibahas tentang matriks, determinan, fungsi, limit fungsi, turunan fungsi, integral tak tentu, integral tertentu. Penyajian dari tiap-tiap bab menggunakan bahasa yang sangat mudah untuk dipahami oleh pembaca dan juga disertai dengan contoh-contoh soal. Kompetensi yang ingin dicapai adalah mahasiswa mampu menerapkan konsep dari pembelajaran pada buku matematika untuk vokasi ini sehingga mampu untuk menganalisa dan menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang relevan dengan materi yang ada pada buku ini.

Biografi Penulis

Andika Wisnujati, S.T., M. Eng lahir di Bantul, 12 Agustus 1983, telah menyelesaikan pendidikan S1 di bidang Teknik Mesin (lulus 2008) dan S2 di bidang Teknik Mesin (lulus 2014) di Universitas Gadjah Mada Yogyakarta. Saat ini bekerja sebagai dosen tetap Program Studi D3 Teknologi Mesin, Program Vokasi Universitas Muhammadiyah Yogyakarta. Mengampu mata kuliah Matematika, Pengetahuan Bahan Teknik, Menggambar Teknik dan Metalurgi. Aktif sebagai peneliti dan penulis artikel ilmiah di beberapa Jurnal Ilmiah Nasional Terakreditasi. Pernah ditugaskan sebagai tenaga ahli permesinan oleh Kementerian PUPERA tahun 2015 di Labanka, Sumbawa, dan Kobisonta, Maluku Utara. Saat ini sedang melanjutkan studi S3 di Asia University, Taiwan.

Agung Mulyo Widodo, ST, MSc., lahir di Surabaya, 21 Januari 1973, menyelesaikan pendidikan Sarjana di Jurusan Teknik Fisika, Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya, tahun 1997 dan Master di Penginderaan Jauh Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, tahun 2015 serta pernah menempuh Magister di Ilmu Komputer, Institut Pertanian Bogor. Saat ini sedang menempuh pendidikan S3 bidang Computer Science and Informatic Engineering di Asia University, Taiwan.

Pernah menjadi pengajar tetap di Jurusan Teknik Fisika, ITS Surabaya tahun 1998-2007, dan saat ini sebagai pengajar tetap di Fakultas Ilmu Komputer Universitas Esa Unggul, Jakarta. Tertarik pada bidang *computing mathematic*, pemodelan dan kecerdasan buatan dan saat ini aktif sebagai pengajar dan peneliti pada bidang tersebut. Pernah menjadi tenaga ahli di PT. Surveyor Indonesia, Surabaya, di Pusat GIS Remote Sensing, LPPM-ITS Surabaya yang menangani berbagai proyek kerjasama berbagai daerah (Jawa Timur, Madura dan Bali) di Indonesia dengan LPPM-ITS, pernah menjadi tenaga ahli pada proyek HCT Pipeline PT. Caltex Pacific Indonesia di wilayah Riau, proyek pembuatan peta dasar Kabupaten Kutai Barat dan proyek GIS jaringan pipa distribusi PDAM Surabaya dll.